**Лекция 5 Квадратичные формы**

**5.1 Понятие формы**

**А5.1.1 Определение.** Многочлен степени  от переменных  называется формой степени , если все слагаемые имеют одну и ту же степень относительно совокупности переменных .

**А5.1.2** *Замечание 1.* 1) форма первой степени (*линейная форма*) от переменных имеет вид ; 2) форма второй степени (*квадратичная форма*) от переменных имеет вид ; 3) форма третьей степени от переменных имеет вид .

**А5.1.3** *Замечание 2.* 1) Линейную форму можно рассматривать как скалярное произведение вектора  и вектора ; 2) Квадратичную форму также можно рассматривать как скалярное произведение , где матрица  называется *матрицей квадратичной формы*. Кроме того, квадратичную форму можно представить как произведение матриц .

**А5.1.4** *Замечание 3.* Поскольку , то  и матрица квадратичной формы является симметрической матрицей, а сама квадратичная форма  в развернутом виде выглядит так: .

**5.2 Невырожденные линейные замены**

**А5.2.1** Рассмотрим линейное преобразование переменных 



 (\*)

………………………..



с невырожденной матрицей . Очевидно, что равенства (\*) можно записать в следующем матричном виде: .

**А5.2.2 Теорема (о линейных преобразованиях квадратичных форм)** Квадратичная форма от  неизвестных , имеющая матрицу  после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей  превращается в квадратичную форму о новых неизвестных с матрицей .

*Доказательство:* Покажем сначала, что для любых матриц  и  имеет место равенство . Элемент матрицы , стоящий в ее -ой строке и -ом столбце, в матрице  расположен в -ой строке и -ом столбце. Он равен сумме произведений соответствующих элементов -ой строки матрицы  и -ого столбца матрицы , а значит, равен сумме произведений соответствующих элементов -ого столбца матрицы  и -ой строки матрицы . Что и требовалось.

Поскольку , то . Значит, . Обозначив , получим , что и требовалось.

**А5.2.3 Пример.** Матрицей квадратичной формы  является . Сделаем линейную замену переменных  с матрицей . Согласно теореме А29.2.2 получим квадратичную форму с матрицей , то есть, квадратичная форма .

**5.3 Канонический вид квадратичной формы**

**А5.3.1 Определение:** Говорят, что квадратичная форма имеет канонический вид, если она имеет вид .

**А5.3.2 Теорема (о каноническом виде квадратичной формы)** Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду некоторым линейным преобразованием с матрицей, имеющей ненулевой определитель.

*Доказательство:* Допустим сначала, что среди слагаемых квадратичной формы  есть хотя бы один квадрат. Без ограничения общности можно считать, что это квадрат первой переменной: . Тогда выражение



содержит такие же слагаемые с неизвестным , как и квадратичная форма . Значит, разность



будет квадратичной формой, не содержащей переменной .

Значит, . Сделаем линейную замену переменных , тогда . Если квадратичная форма  также содержит квадрат хотя бы одной из переменных, то с ней можно поступить аналогичным образом и получить квадратичную форму

.

Если квадратичная форма  снова содержит хотя бы один квадрат, то с ней также можно поступить аналогично и т.д.

Пусть на каком-то этапе квадратичная форма  не содержит ни одного квадрата неизвестных. Допустим, что среди слагаемых квадратичной формы  есть слагаемое . Рассмотрим линейное преобразование

, , (при ).

Тогда  и в квадратичной форме появятся слагаемые, содержащие квадраты.

Каждому из линейных преобразований соответствует некоторая матрица. Пусть последовательно выполняемым линейным преобразованиям соответствуют матрицы , тогда композиции всех проведенных преобразований будет соответствовать матрица . *Теорема доказана.*

**А5.3.3 Пример:** Привести к каноническому виду квадратичную форму 

*Решение:* Поскольку в форме отсутствуют квадраты, выполним преобразование , , :



.



Полагаем : .

.

Полагаем : .

Можно также сделать линейное преобразование:

.

**А5.3.4 Теорема (о каноническом виде квадратичной формы)** Одним из канонических видов квадратичной формы является , где  - собственные числа матрицы, а соответствующее линейное преобразование при этом задается матрицей , где  - собственный вектор единичной длины, соответствующий собственному числу .

*Без доказательства.*

**5.4 Определенные квадратичные формы**

**А5.4.1 Определение.** Квадратичная форма  называется:

- *неотрицательно определенной*, если при любых значениях переменных выполнено неравенство;

- *положительно определенной*, если она неотрицательно определена и обращается в ноль только при ;

- *неположительно определенной*, если при любых значениях переменных выполнено неравенство ;

- *отрицательно определенной*, если она неположительно определена и обращается в ноль только при ;

- *неопределенной* если при различных значениях переменной она может принимать как положительные, так и отрицательные значения;

**А5.4.2 Примеры**: 1)  - неотрицательно определенная форма, так как , но , например, при ; 2)  - положительно определенная форма, так как  и  только при ; 3)  - неположительно определенная форма, так как , но , например, при , .

**А5.4.3 Теорема (об определенных квадратичных формах)** Квадратичная форма:

- неотрицательно определена, когда все собственные числа ее матрицы неотрицательны;

- положительно определена, когда все собственные числа ее матрицы положительны;

- неположительно определена, когда все собственные числа ее матрицы неположительны;

- отрицательно определена, когда все собственные числа ее матрицы отрицательны;

*Доказательство.* Пусть квадратичная форма  заменой переменных с невырожденной матрицей  приведена к виду  (среди слагаемых могут быть и нулевые).

Если все , то и  и форма положительно определена.

Пусть все  и при этом , . Тогда, очевидно, . При этом если  и , то . И форма неотрицательно определена, не будучи положительно определенной.

Если все , то и  и форма отрицательно определена.

Пусть все  и при этом , . Тогда, очевидно, . При этом если  и , то . И форма неположительно определена, не будучи отрицательно определенной. Теорема доказана.

**А5.4.4** *Следствие.* Квадратичная форма от переменных положительна определена, если она имеет ранг  и приводится к какому-либо каноническому виду с положительными коэффициентами при квадратах. Квадратичная форма от переменных отрицательна определена, если она имеет ранг  и приводится к какому-либо каноническому виду с отрицательными коэффициентами при квадратах.

**5.5 Критерий Сильвестра**

**А5.5.1 Определение.** Главными минорами матрицы , а если эта матрица симметрична, то и главными минорами соответствующей квадратичной формы называются: , , ,…, .

**А5.5.2 Теорема (критерий Сильвестра)** Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.

*Без доказательства.*

**А5.5.3** **Теорема (критерий Сильвестра)** Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда  и далее знаки главных миноров чередуются.

*Без доказательства.*

**А5.5.5 Пример** Проверить, будет ли положительно определенной квадратичная форма 

*Решение*: Составим матрицу квадратичной формы:

****

Вычислим ее главные миноры: 5 >0, , .

Квадратичная форма положительно определена.

Контрольные вопросы:

1. Что называется квадратичной формой? Что называется матрицей квадратичной формы?
2. Сформулируйте теорему о линейных преобразованиях квадратичных форм.
3. Что такое канонический вид квадратичной формы? Сформулируйте теорему о каноническом виде квадратичной формы.
4. Какая квадратичная форма называется положительно (неположительно, неотрицательно, отрицательно) определенной?
5. Сформулируйте теорему об определенных квадратичных формах.
6. Что называется главными минорами матрицы? Сформулируйте критерий Сильвестра)